PREREQUISITI

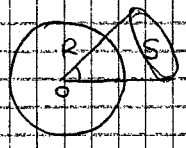
ANGOLO SOLIDO

Proprio come agli angoli convessi è associata un'ampiezza, lo stesso vale per gli angoli solidi.



$1\ \text{rad} = \frac{\hat{R}}{R} = \frac{[L]}{[L]} = L^0 \rightarrow$ angolo convesso è una grandezza adimensionale

$1\ \text{rad} = \frac{360}{2\pi} = 57°\,17'\,45''$



Un angolo solido è una possibile estensione allo spazio 3D del concetto di angolo piano

Con S superficie sferica vista sotto l'angolo

$1\ \text{sterad} = \frac{S}{R^2} = \frac{[L]^2}{[L]^2} = L^0 \rightarrow$ anche l'angolo solido è a adimensionale

PRODOTTO VETTORE TRA GLI ASSI

$\hat{x} \wedge \hat{x} = 0$	$\hat{x} \wedge \hat{y} = \hat{z}$	$\hat{x} \wedge \hat{z} = -\hat{y}$
$\hat{y} \wedge \hat{x} = -\hat{z}$	$\hat{y} \wedge \hat{y} = 0$	$\hat{y} \wedge \hat{z} = \hat{x}$
$\hat{z} \wedge \hat{x} = \hat{y}$	$\hat{z} \wedge \hat{y} = -\hat{x}$	$\hat{z} \wedge \hat{z} = 0$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

COSTANTI

Gravità $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ m^3/(s^2 \cdot kg)$

Vel luce $c = 3{,}00 \cdot 10^8\ m/s$

Carica elem $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ C$

Massa elettrone $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ kg$

Massa protone $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ kg$

Cost. dielettrica $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ F/m$

Perm magnetica $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ H/m$

Acc gravità $g = 9{,}81\ m/s^2$

Raggio Terra $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6\ m$

Massa Terra $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

CINEMATICA

Consideriamo un corpo che si muove soltanto di moto di traslazione: esso può essere trattato come un punto materiale di cui interessa conoscere solo la posizione a un generico istante t.

La posizione di un punto è indicata in modo univoco solo se si conoscono le sue coordinate x, y e z in un generico sistema di riferimento cartesiano ortogonale → LEGGE ORARIA DEL MOTO

MOTO UNIDIMENSIONALE (per moti semplici per cui è sufficiente una funzione per identificare la posizione del corpo.)

Vettore spostamento: è il vettore che congiunge i punti x_0 (coordinata del corpo al tempo iniziale) e x (coordinata del corpo al tempo finale) sull'asse x Dim: $[L]=m$

Vettore velocità
- velocità media: è lo spazio percorso nell'unità di tempo

$$\vec{v}=\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}=\frac{x-x_0}{t_f-t_i}\hat{x}$$

- velocità istantanea: è il limite del rapporto incrementale per un piccolissimo intervallo di tempo

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\hat{x}=\frac{d\vec{x}}{dt}$$

Dim $[L]/[T]=m/s$

Vettore accelerazione quando la velocità di un corpo varia nel tempo si dice che il moto del corpo è accelerato

- accelerazione media: è la variazione di velocità nell'unità di tempo

$$\vec{a}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{v-v_0}{t_f-t_i}\hat{x}$$

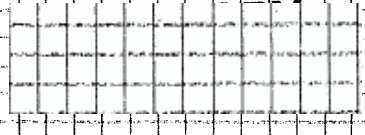
- accelerazione istantanea: è il limite del rapporto incrementale per un piccolissimo intervallo di tempo

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}\hat{x}=\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Dim $[L]/[T]^2=m/s^2$

Come passare da una grandezza all'altra

- $\vec{v}=\frac{d\vec{x}}{dt}$
- $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$
- $\vec{x}=\vec{x}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{v}\,dt$ con $\vec{v}=\vec{v}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{a}\,dt$
- $\vec{v}=\vec{v}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{a}\,dt$



Moto uniformemente accelerato

Se scegliamo come asse x quello parallelo al vettore, allora tale moto è descritto dalla relazione $\vec{a} = a\hat{x}$ con $a = cost$

da cui:
$$\begin{cases} v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a\,dt = v(t_0) + a(t-t_0) \\ x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} [v(t_0) + a(t-t_0)]\,dt = x(t_0) + v(t_0)(t-t_0) + \\ \qquad + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2 \end{cases}$$

Un caso particolarmente semplice è quello in cui l'accelerazione del corpo è costantemente uguale a 0. In questo caso infatti (sostituendo la condizione $\vec{a}=0$ nell'integrale $\int_{t_0}^{t} a\,dt = v(t_0)$):
$$\begin{cases} \vec{a} = 0 \\ v(t) = v(t_0) \\ x(t) = x(t_0) + v(t_0)(t-t_0) \end{cases}$$
e si parla di moto rettilineo uniforme

Risulta spesso utile conoscere la velocità in funzione dello spostamento invece che del tempo

$$\begin{cases} v = v_0 + a(t-t_0) \\ x = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2 \end{cases}$$
ricavo $t-t_0$ e lo sostituisco sotto

$$\begin{cases} t - t_0 = \frac{v-v_0}{a} \\ x = x_0 + v_0\left(\frac{v-v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\frac{(v-v_0)^2}{a^2} = x_0 + \frac{2v_0v - 2v_0^2}{a} + \frac{v^2 + v_0^2 - 2v_0v}{a} = \end{cases}$$

$$\begin{cases} / \\ v^2 = v_0^2 + 2a(x-x_0) \end{cases}$$

MOTO IN PIÙ DI UNA DIMENSIONE

I concetti sopra introdotti si generalizzano immediatamente al caso in cui il moto della particella avvenga in due o tre dimensioni. In generale:

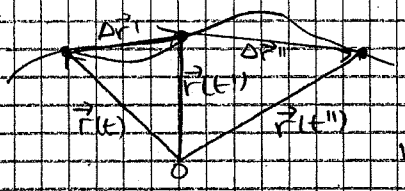
Vettore posizione: una particella che si muove nello spazio è descritta da tale vettore che
$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$ o $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$
e quindi uno spostamento può essere scritto come la differenza tra il vettore iniziale e finale

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i = (x(t') - x(t), y(t') - y(t), z(t') - z(t))$$

Velocità e accelerazione rispettano le stesse relazioni, sostituendo alle derivate i gradienti.

TRAIETTORIA

Un utile concetto per descrivere il moto di un corpo in quanto è la curva descritta dal punto materiale durante il suo moto.



I vettori $\vec{r}(t)$ $\vec{r}(t') = \vec{r}(t+\Delta t_1)$ $\vec{r}(t'') = \vec{r}(t+\Delta t_2)$ rappresentano la posizione del corpo nei vari istanti.

Gli spostamenti effettuati dal corpo nei due intervalli di tempo sono i due vettori $\Delta\vec{r}_1$ e $\Delta\vec{r}_2$

La velocità media $\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ è un vettore diretto nella stessa direzione e verso dello spostamento ($1/\Delta t$ è uno scalare)

La velocità istantanea è invece in ogni punto tangente alla traiettoria

L'accelerazione istantanea ha comportamento in genere più complesso. Per capire quali sono i fattori che determinano l'accelerazione di un corpo conviene innanzitutto notare che $\vec{v}$ può essere scritto come

$$\vec{v} = v\hat{v}$$

Si può inoltre dimostrare per mezzo dell'analisi che se $f(t)$ è una funzione del tempo e $\vec{a}(t)$ è un vettore che varia nel tempo vale l'identità

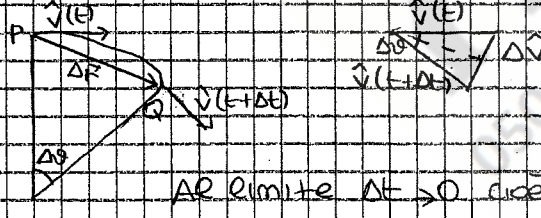
$$\frac{d}{dt}\left[f(t)\vec{a}(t)\right] = f(t)\frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{a}\frac{f(t)}{dt}$$ che applicata all'accelerazione

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v\hat{v}) = \frac{dv}{dt}\hat{v} + v\frac{d\hat{v}}{dt} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$$

Accelerazione tangenziale È un vettore di modulo $|dv/dt|$ diretto nella stessa direzione di $\hat{v}$ e quindi della velocità. Il verso di $\vec{a}_t$ dipende da dv/dt; $\vec{a}_t = 0$ solo se v è costante. $\vec{a}_t$ è in generale tangente alla traiettoria del corpo

Accelerazione radiale (centripeta) $\vec{a}_r$ è un vettore che è diverso da zero solo se $\hat{v}$ cambia nel tempo, cioè se il moto avviene su una traiettoria curvilinea. Dimostriamo quale sia la relazione che lega velocità e accelerazione centripeta

Consideriamo un arco di traiettoria circolare. $\hat{v}(t)$ è perpendicolare a OP e $\hat{v}(t+\Delta t)$ a OQ. Poiché OP e OQ formano un angolo $\Delta\vartheta$ tra loro, anche $\hat{v}(t)$ e $\hat{v}(t+\Delta t)$ devono formare lo stesso angolo.



Poiché $|\hat{v}(t)| = |\hat{v}(t+\Delta t)| = 1$ il triangolino formato dalle velocità è isoscele e la base è quindi lunga

$$|\Delta\hat{v}| = 2|\hat{v}|\sin\frac{\Delta\vartheta}{2} = 2\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}$$

Al limite $\Delta t \to 0$ cioè $\Delta\vartheta \to 0$ $\sin\frac{\Delta\vartheta}{2} \to \frac{\Delta\vartheta}{2}$ e quindi

$$\lim_{\Delta t\to 0}|\Delta\hat{v}| = 2\frac{\Delta\vartheta}{2} = \Delta\vartheta$$

Se $\Delta\ell$ è la lunghezza dell'arco di circonferenza compresa tra P e Q per definizione di angolo $\Delta\vartheta$ in radianti vale l'uguaglianza $\Delta\vartheta = \frac{\Delta\ell}{r}$

Per $\Delta t \to 0$ P si avvicina sempre più a Q e $\Delta\vec{r}$ tende a coincidere con l'arco di traiettoria. Quindi per $\Delta t \to 0$ $\Delta\ell \to |\Delta\vec{r}|$ e

$$\frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} = \frac{\Delta\ell}{r\Delta t} \to \frac{|\Delta\vec{r}|}{r\Delta t} = \frac{v}{r}$$

e quindi per similitudine tra i triangoli

$$\left|\frac{\Delta\hat{v}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\hat{v}|}{\Delta t} = \frac{v}{r}$$